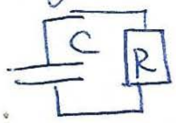
Даннная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по статфизике
Мостовому Сергею Дмитриевичу

С.Д.(о какой-то формуле): Её смысл обычно непонятен… но вам придётся это сдать!

Задача 47.

Определить среднее от квадрата заряда $Q(t)$, прошедшего за счет существования флуктуационных токов $I(t)$ через соединяющий обкладки конденсатора проводник с сопротивлением R за время t.

Задача 47 Изначально C не заряжен, но из-за Θ на нём образуется случайный заряд. $\langle q^2\rangle$ – ?



Решение. Представим неидеальный C —||— (C,Θ) как —||—(~)— (C; q,θ), где C – идеальный конденсатор, $\mathcal{E},\Theta$ – источник случайного напряжения.

Тогда $R\dot{q} + qC = \mathcal{E}(t)$ ← случайная величина!

Где-то мы это уже видели... $\dot{p} + \Gamma p = F(t)$, ур-е Ланжевена!
Для него мы получили готовый результат $\langle p^2\rangle = 2\Gamma m\Theta t$.
Замены: $q \leftrightarrow p$, $RC \leftrightarrow \Gamma$, $\frac{\mathcal{E}}{R} \leftrightarrow F$. Но что делать с Θ?
Как ввести температуру в задачу?
Модель: будем считать, что система имеет всего 1 степень свободы – $q(t)$. Тогда на неё приходится энергия $\Theta/2$:

$$\frac{\langle q^2\rangle}{2C} = \Theta/2.$$ Т.к. $\frac{\langle p^2\rangle}{2M} = \Theta/2$, то, учитывая $q \leftrightarrow p$, $C \leftrightarrow m$.

Ответ: $$2\overset{1/RC}{\Gamma}\,\overset{C}{m}\,\Theta t = 2\cdot\frac{1}{RC}\cdot C\cdot\Theta\cdot t = \frac{2\Theta}{R}\cdot t.$$

Ограничения на время: сверху $t \ll 1/\Gamma \Rightarrow t \ll 1/RC$

снизу $t \gg \tau'$ – характерного времени 1ГШВ (где и было записано ур-е Ланжевена)

12. Получить формулу Найквиста для спектральной плотности теплового шума сопротивления R при температуре θ в полосе частот $\Delta\nu$.

Если вы откроете курс радиофиза, то там вы увидите под формулой Найквиста:

$$S = 4R\theta$$

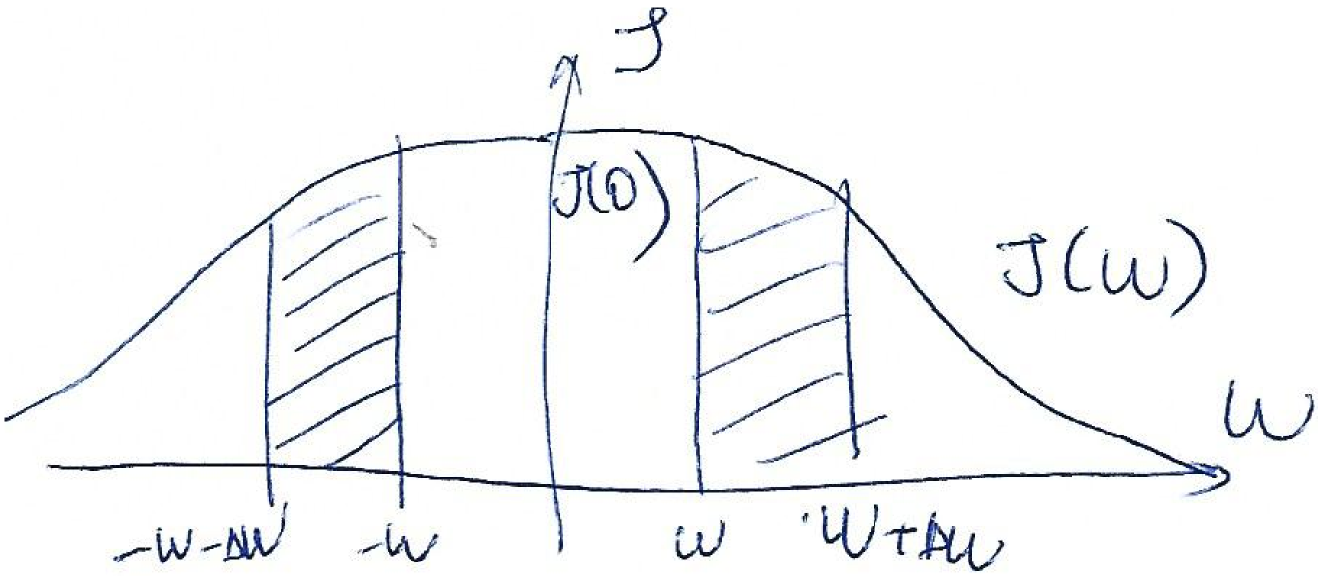
Где S – общий спектральный шум резистора.

У нас же сейчас будет немного более общий случай.

Полученную в прошлой задаче $<\xi^2>$ разложим по частотам:

$$<\xi^2> = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)d\omega$$

И вдруг нас станет интересовать не весь шум $<\xi^2>$, а шум лишь в каком-то диапазоне частот $\Delta\omega$:



Тогда очень грубо можно оценить его как $2J(0)\Delta\omega$. Двойка, потому что полосы слева и справа.

Но как мы знаем из результатов Дуба,

$$J(0) = \frac{<\xi^2>}{\pi\Gamma}$$

Подставляя, получаем

$$<\xi^2> \text{ в полосах } \Delta\omega = \frac{2<\xi^2>}{\pi\Gamma}\Delta\omega$$

Это и есть формула Найквиста. Она связывает шум в полосе частот с общим шумом на всех частотах.

Потом радиофизики адаптировали её для себя – заменив Γ на $\frac{1}{R}$ и проинтегрировав, где вылезет коэф 2π. Так они и получили $S = 4R\theta$.